Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XIX**, 4.

UNE INÉGALITÉ DE KOLMOGOROFF ET LES FONCTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES

PAR

THØGER BANG

KØBENHAVN
I KOMMISSION HOS EJNAR MUNKSGAARD
1941

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

INTRODUCTION

Dans ce travail nous allons démontrer quelques inégalités des bornes supérieures des intégrales successives d'ordres entières ou fractionnaires et les appliquer aux fonctions presque-périodiques[1].

Soit $f_0(x)$ une fonction intégrable au sens de M. Lebesgue, définie sur tout l'axe réel; une suite des intégrales successives de $f_0(x)$ d'ordre jusqu'à n sera désignée $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$ $f_n(x)$. Posons

$$M_k = \overline{\underset{-\infty < x < \infty}{\text{borne}}} \, |f_k(x)| \qquad \text{(fini ou infini).}$$

Entre les quantités M_0, M_1, $\cdots$ M_n il y a des relations; M. Hadamard a démontré[2] l'inégalité

$$M_1 \leqq \sqrt{2 M_0 M_2}$$

et on voit facilement que cette inégalité ne peut pas être améliorée. Et récemment on a démontré: Pour $0 < k < n$ il existe une limitation de M_k dépendant seulement de k, n, M_0, et M_n. Dans les cas $n = 3$ et $n = 4$ de telles limitations, et justement les plus favorables, ont été trouvées par M. G. Šilov; pour toute valeur de n une limitation a été trouvée par M. A. Gorny, mais pas la plus favorable, laquelle M. A. Kolmogoroff a indiquée le premier[3]; dans la suite cette limitation sera donc nommée »l'inégalité de Kolmogoroff«. Autant que je sais, la démonstration de cette

(1) Ici comme partout dans ce travail: Au sens de M. Bohr.

(2) Comptes rendus des séances de la Société mathématique de France 1914, p. 68—72.

(3) Voir Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 206 (1938), p. 1245—1247 (Gorny), et 207 (1938), p. 764—765 (Kolmogoroff).

inégalité n'est pas encore publiée; un des buts du présent travail sera donc d'en communiquer une[1].

L'inégalité de Kolmogoroff est de la forme

$$M_k \leq M_0^{1-\frac{k}{n}} \cdot M_n^{\frac{k}{n}} \cdot K_n^k$$

où K_n^k est une constante, dépendant seulement de k et n, et cette constante a une telle valeur qu'on a l'égalité, si pour $f_0(x)$ on choisit la fonction

$$\varphi_0(x) = \text{sign} \sin x = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sin(2\nu+1)x}{2\nu+1}.$$

Soient M_0 et M_n finis (le théorème est sans intérêt en dehors de ce cas), l'inégalité nous apprend que M_k est également fini, et nous donne une borne supérieure de cette quantité; comme cette borne est atteinte pour la fonction $\varphi_0(x)$, cette fonction sera nommée fonction extrémale.

Nous donnerons de plus un résumé du contenu des pages suivantes:

Dans la section I l'inégalité de Kolmogoroff sera démontrée pour le cas où $f_n(x)$ est une fonction presque-périodique, et l'inégalité sera utilisée à donner une démonstration simple des inégalités de MM. Bohr et Favard concernant les bornes supérieures des intégrales successives d'une somme finie trigonométrique sans terme constant, et nous allons indiquer comment il est possible de déduire d'une façon tout à fait analogue la limitation bien connue de M. Bernstein pour la dérivée d'une somme finie trigonométrique[2].

(1) La démonstration se trouve dans Uchenye Zapiski Moskov. Gos. Univ. Matematika 30 (1939), p. 3—16 (ce renseignement m'a été donné par M. B. Jessen); malheureusement ce périodique n'existe pas en Danemark.

(2) Ce n'est que pour ces applications que l'inégalité de Kolmogoroff est énoncée pour les fonctions presque-périodiques; pour la démonstration

Dans la section II nous introduisons la notion d'intégrale d'ordre fractionnaire d'une fonction presque-périodique par une définition qui s'appuie sur la représentation par séries de FOURIER: S'il existe deux fonctions presque-périodiques $f_0(x)$ et $f_\alpha(x)$, dont les séries de FOURIER sont respectivement

$$\sum a_\lambda e^{i\lambda x} \quad \text{et} \quad \sum \frac{a_\lambda}{(i\lambda)^\alpha} e^{i\lambda x}$$

nous dirons que $f_\alpha(x)$ est une intégrale presque-périodique d'ordre α de $f_0(x)$ (α réel ou complexe). Les sommes trigonométriques finies possèdent des intégrales presque-périodiques d'ordre quelconque; au contraire pour une fonction presque-périodique arbitraire se présente la question de la nature de l'ensemble des nombres α pour lesquels la fonction a une intégrale presque-périodique d'ordre α.

Entre les bornes supérieures absolues des intégrales presque-périodiques d'ordre fractionnaire il y a aussi quelques inégalités; d'abord nous nous bornerons aux sommes finies trigonométriques, pour lesquelles nous démontrerons que pour $0 < \bar{\alpha} < \bar{\beta}$ (1) on a

$$M_\alpha \leqq M_0^{1-\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}} \cdot M_\beta^{\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}} \cdot K_\beta^\alpha$$

où K_β^α est une constante ne dépendant que de α et β. Grâce à cette inégalité nous pourrons résoudre le problème cité, et comme solution on obtiendra que l'ensemble des valeurs de α en question sera une bande (verticale) dans le plan complexe, et on verra aussi que l'inégalité est valable pour une fonction presque-périodique quelconque,

dans le cas général (section III), la validité pour les fonctions périodiques est suffisante, et nous n'utilisons pas dans la preuve des résultats profonds de la théorie des fonctions presque-périodiques.

(1) Dans ce travail $\bar{\alpha}$ signifie la partie réelle de α; pour éviter des malentendus nous n'emploierons pas le nombre complexe conjugé de α.

pourvu que les intégrales d'ordre α et β existent. La détermination des constantes K_β^α les plus favorables ne sera pas accomplie, il sera seulement montré que dans le cas général la fonction $\varphi_0(x)$ n'est plus une fonction extrémale, puisqu'il n'en existe pas qui soit indépendante de α et de β. A la fin de cette section nous généraliserons les inégalités de MM. Bohr, Favard et Bernstein au cas de l'intégration (ou »dérivation«) d'ordre fractionnaire.

Dans la section III nous démontrerons que l'inégalité de Kolmogoroff est valable, non seulement pour les fonctions presque-périodiques, mais aussi pour toute fonction d'une variable réelle; nous ferons la preuve en montrant qu'à une telle fonction on peut toujours construire une fonction périodique de telle sorte que, pour un nombre fini d'ordres d'intégration, la différence entre les bornes supérieures des intégrales du même ordre de ces deux fonctions n'excède pas ε, où ε est un nombre positif quelconque, donné d'avance.

Pour les intégrales d'ordre fractionnaire des fonctions presque-périodiques on a la formule

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f_0(x-t) \cdot t^{\alpha-1} dt \quad \left\{ \begin{array}{l} (\text{pour} \\ 0 < \bar{\alpha} < 1). \end{array} \right.$$

M. E. R. Love a utilisé cette formule pour définir l'intégration d'ordre fractionnaire aussi pour des fonctions non presque-périodiques[1]. Il se pourrait qu'entre les bornes supérieures de telles intégrales on ait les mêmes inégalités que pour les fonctions presque-périodiques, et probablement on pourrait vérifier cette proposition par une »approximation« avec des fonctions périodiques analogue à la

[1] Proceedings of the London Mathematical Society 44(1938), p. 363—397.

citée, mais la théorie de l'intégration d'ordre fractionnaire est encore incomplète, et nous n'insisterons donc pas sur ce point.

I. L'inégalité de Kolmogoroff pour les fonctions presque-périodiques.

Dans cette partie démontrons d'abord le théorème:

Théorème I (l'inégalité de KOLMOGOROFF pour les fonctions presque-périodiques): Soit $f_0(x)$ une fonction réelle et bornée, définie sur tout l'axe réel et avec une intégrale d'ordre n presque-périodique, $f_n(x)$. Désignons par $f_k(x)$ l'intégrale d'ordre k de $f_0(x)$ (une dérivée de $f_n(x)$). Toutes les fonctions $f_k(x)$ ($k = 1, 2, \cdots n \div 1$) sont bornées[1], et pour la borne supérieure de $f_k(x)$, désignée M_k, on a

$$M_k \leqq M_0^{1-\frac{k}{n}} \cdot M_n^{\frac{k}{n}} \cdot \frac{t_k}{t_n^{\frac{k}{n}}}$$

où

$$t_h = \frac{4}{\pi}\left[1 + \frac{1}{(-3)^{h+1}} + \frac{1}{5^{h+1}} + \frac{1}{(-7)^{h+1}} + \cdots\right]$$

et cette inégalité est la plus favorable.

Nous faisons remarquer que l'inégalité peut s'écrire sous la forme plus élégante

$$\left(\frac{M_k}{M_0 \cdot t_k}\right)^{\frac{1}{k}} \leqq \left(\frac{M_n}{M_0 \cdot t_n}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad (0 < k < n).$$

Que l'inégalité ne puisse pas être améliorée on le voit en considérant la fonction

(1) D'où il résulte qu'ils sont uniformément continues, donc aussi presque-périodiques.

$$\varphi_0(x) = \operatorname{sign}\sin x = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\sin(2\nu+1)x}{2\nu+1}$$

pour laquelle M_k est égale à t_k et M_0 est 1, donc

$$\left(\frac{M_k}{M_0 \cdot t_k}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{M_n}{M_0 \cdot t_n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Il reste à démontrer que l'inégalité est vérifiée pour une fonction presque-périodique quelconque $f_n(x)$, et pour cela il suffit de démontrer la relation

$$\left(\frac{M_{n-1}}{M_0 \cdot t_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}} \leqq \left(\frac{M_n}{M_0 \cdot t_n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Nous raisonnerons par l'absurde, en supposant qu'il existe une fonction $f_0(x)$ et un nombre α, tels que

$$\left(\frac{|f_{n-1}(\alpha)|}{M_0 \cdot t_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}} > \left(\frac{M_n}{M_0 \cdot t_n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

et en montrant qu'une comparaison de $f_0(x)$ avec $\varphi_0(x)$ aboutit à une contradiction. D'abord, considérons de près $\varphi_0(x)$ et ses intégrales:

$\varphi_0(x)$ a la période 2π; $\varphi_0(x) = 1$ pour $0 < x < \pi$, et $\varphi_0(x) = -1$ pour $\pi < x < 2\pi$; $\varphi_n(x)$ est également périodique; dans la suite »un intervalle de période« signifiera un intervalle $x_1 \leqq x < x_1 + 2\pi$, où $\varphi_n(x_1) = -t_n$; dans chaque intervalle de période, $\varphi_n(x)$ s'accroît de $-t_n$ à t_n, puis décroît à $-t_n$.

Si

$$\left(\frac{|f_{n-1}(\alpha)|}{M_0 \cdot t_{n-1}}\right)^{\frac{1}{n-1}} > \left(\frac{M_n}{M_0 \cdot t_n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

il serait possible d'obtenir une fonction $g_0(x) = a \cdot f_0(bx+c)$, de sorte que

$$\overline{\text{borne}}\, |g_0(x)| = |a| \cdot M_0 < 1 = \overline{\text{borne}}\, |\varphi_0(x)|$$

et

$$\overline{\text{borne}}\, |g_n(x)| = \frac{|a|}{|b|^n} \cdot M_n < t_n = \overline{\text{borne}}\, |\varphi_n(x)|$$

tandis que

$$g_{n-1}\left(\frac{\alpha - c}{b}\right) = \frac{a}{b^{n-1}} \cdot f_{n-1}(\alpha) > t_{n-1} = \overline{\text{borne}}\, |\varphi_{n-1}(x)|$$

et où on a choisi c de telle façon que $g_n\left(\frac{\alpha-c}{b}\right) = \varphi_n\left(\frac{\alpha-c}{b}\right)$, avec $x_1 < \frac{\alpha - c}{b} < x_2$, $\varphi_n(x_1) = -t_n$, $\varphi_n(x_2) = +t_n$, x_1 et x_2 dans le même intervalle de période.

Comme la différence $d_0(x) = g_0(x) - \varphi_0(x)$ est négative pour $2h\pi < x < (2h+1)\pi$ (h entier) et positive pour $(2h+1)\pi < x < (2h+2)\pi$, cette fonction n'admet que deux changements de signe dans chaque intervalle de période.

Sa n-ième intégrale $d_n(x) = g_n(x) - \varphi_n(x)$ possède une valeur positive pour $x = x_1 + 2h\pi$ et une valeur négative pour $x = x_2 + 2h\pi$; cette fonction a donc au moins deux zéros dans chaque intervalle de période. Pour $x = \frac{\alpha - c}{b}$ elle a un zéro avec une dérivée positive $\left(\text{car } g_{n-1}\left(\frac{\alpha-c}{b}\right) > t_{n-1}\right.$ et $\left.\varphi_{n-1}\left(\frac{\alpha-c}{b}\right) \leqq t_{n-1}\right)$, et puisque $d_n(x_1) > 0$ et $d_n(x_2) < 0$, elle possède au moins trois zéros entre x_1 et x_2, donc au moins quatre dans l'intervalle de période $x_1 \leqq x < x_1 + 2\pi$; or $d_n(x)$ est presque-périodique (la différence entre une fonction périodique et une fonction presque-périodique) et il y a donc un nombre infini d'intervalles de période qui contiennent au moins quatre zéros.

Dès lors on peut obtenir un intervalle d'une telle longueur que, dans cet intervalle, le nombre de zéros de $d_n(x)$ surpasse le nombre de zéros (ou changements de signe) de $d_0(x)$ de plus de n. Mais chaque dérivation ne peut pas diminuer le nombre de zéros d'un intervalle de plus de un; nous arrivons là à une contradiction, et notre proposition est donc établie.

Dans le théorème nous pouvons supprimer le mot réel. En effet, soient $f_0(x)$, $f_k(x)$ et $f_n(x)$ des fonctions complexes d'une variable réelle, on peut voir que l'inégalité est vérifiée, rien qu'en considérant les fonctions réelles $\overline{e^{i\theta}\cdot f_0(x)}$, $\overline{e^{i\theta}\cdot f_k(x)}$ et $\overline{e^{i\theta}\cdot f_n(x)}$, dont les dernières sont des intégrales d'ordre k et n de la première car on a (θ parcourant les nombres réels de 0 à 2π):

$$\underset{x}{\overline{\text{borne}}}\,|f_k(x)| = \underset{\theta}{\overline{\text{borne}}}\;\underset{x}{\overline{\text{borne}}}\,\left|\overline{e^{i\theta}\cdot f_k(x)}\right| \leq$$

$$\underset{\theta}{\overline{\text{borne}}}\left[\underset{x}{\overline{\text{borne}}}\,\left|\overline{e^{i\theta}\cdot f_0(x)}\right|^{1-\frac{k}{n}}\cdot\underset{x}{\overline{\text{borne}}}\,\left|\overline{e^{i\theta}\cdot f_n(x)}\right|^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{t_k}{t_n^{\frac{k}{n}}}\right] \leq$$

$$\left[\underset{\theta}{\overline{\text{borne}}}\;\underset{x}{\overline{\text{borne}}}\,\left|\overline{e^{i\theta}\cdot f_0(x)}\right|\right]^{1-\frac{k}{n}}\cdot\left[\underset{\theta}{\overline{\text{borne}}}\;\underset{x}{\overline{\text{borne}}}\,\left|\overline{e^{i\theta}\cdot f_n(x)}\right|\right]^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{t_k}{t_n^{\frac{k}{n}}}$$

$$= \underset{x}{\overline{\text{borne}}}\,|f_0(x)|^{1-\frac{k}{n}}\cdot\underset{x}{\overline{\text{borne}}}\,|f_n(x)|^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{t_k}{t_n^{\frac{k}{n}}}.$$

Comme une application simple de l'inégalité de Kolmogoroff nous démontrons:

Théorème II (l'inégalité de Bohr-Favard): Soit $p_0(x)$ une somme finie trigonométrique sans terme constant

$$p_0(x) = \sum_{h=1}^{k} a_h e^{i\lambda_h x}, \qquad \overline{\text{borne}}\,|p_0(x)| = M_0$$

et par Λ désignons $\min|\lambda_h|$ (>0), on a alors pour l'intégrale d'ordre n

$$p_n(x) = \sum_{h=1}^{k} \frac{a_h}{(i\lambda_h)^n} e^{i\lambda_h x}$$

la limitation

$$\overline{\text{borne}}\, |p_n(x)| \leqq M_0 \cdot \frac{t_n}{\Lambda^n}.$$

Pour $n = 1$ cette inégalité a été démontrée par H. BOHR[1], pour toute valeur de n par J. FAVARD[2].

D'après le théorème I on a

$$\left(\frac{M_n}{M_0 \cdot t_n}\right)^{\frac{1}{n}} \leqq \lim_{m \to \infty} \left(\frac{M_m}{M_0 \cdot t_m}\right)^{\frac{1}{m}} = \lim M_m^{\frac{1}{m}} \cdot \lim \frac{1}{(M_0 \cdot t_m)^{\frac{1}{m}}}$$

les deux dernières limites existent, la première est égale à $\frac{1}{\Lambda}$ $\Big($car les intégrations successives font ressortir les termes dans lesquels $|\lambda_h| = \Lambda$; M_m est donc asymptotiquement égal à $\frac{c}{\Lambda^m}\Big)$, la seconde est égale à 1 $\Big(M_0$ est une constante, et t_m tend vers $\frac{4}{\pi}\Big)$; donc

$$\left(\frac{M_n}{M_0 \cdot t_n}\right)^{\frac{1}{n}} \leqq \frac{1}{\Lambda} \quad \text{ou} \quad M_n \leqq M_0 \cdot \frac{t_n}{\Lambda^n}.$$

Notre théorème est ainsi démontré.

Pour la n-ième dérivée de $p_0(x)$

$$p_0^{(n)}(x) = \sum_{h=1}^{k} a_h (i\lambda_h)^n \cdot e^{i\lambda_h x}$$

on a:

Théorème III (l'inégalité de BERNSTEIN):

$$\overline{\text{borne}}\, |p_0^{(n)}(x)| \leqq M_0 \cdot \max |\lambda_h|^n;$$

[1] Prace Matematyczno-Fizyczne 43 (1935), p. 273—288.

[2] Matematisk Tidsskrift B 1936, p. 81—94.

la démonstration de ce théorème peut être effectuée d'une façon tout à fait analogue, seulement en considérant des dérivées au lieu des intégrales, de manière que $\max|\lambda_h|$ se produit naturellement.

Il faut remarquer que dans des démonstrations antérieures de cette inégalité, dues à M. Riesz et C. de la Vallée-Poussin, on a employé une énumération de zéros, donc une méthode qui a quelque ressemblance avec celle de ce travail(1).

II. Inégalités entre les bornes supérieures des intégrales d'ordre fractionnaire d'une fonction presque-périodique.

Définition: Soit $f_0(x)$ une fonction presque-périodique, dont la série de Fourier s'écrit $\sum a_\lambda e^{i\lambda x}$; si

$$\sum \frac{a_\lambda}{(i\lambda)^\alpha} \cdot e^{i\lambda x}$$

est la série de Fourier d'une fonction presque-périodique, nous dirons que celle-ci est une intégrale presque-périodique d'ordre α de $f_0(x)$, et nous la désignerons $f_\alpha(x)$. α peut être réel ou complexe, et par $(i\lambda)^\alpha$ nous entendons

$$e^{\left(\frac{\pi}{2} i \operatorname{sign} \lambda + \log|\lambda|\right) \cdot \alpha}.$$

Si $f_1(x)$ existe, on sait, selon des théorèmes bien connus, que cette fonction est une intégrale ordinaire de $f_0(x)$; comme une conséquence immédiate de cette section il s'ensuit que la proposition analogue est vraie pour toute valeur entière de α.

(1) Voir par exemple C. de la Vallée-Poussin: Leçons sur l'approximation p. 39—42.

M_α signifie comme toujours $\overline{\text{borne}}\,|f_\alpha(x)|$, et $\bar{\alpha}$ est la partie réelle de α.

Une somme finie trigonométrique sans terme constant a une intégrale presque-périodique d'ordre α pour tout nombre complexe α, et pour ces intégrales nous démontrons le théorème suivant:

Théorème IV: Soit $\bar{\gamma} < \bar{\alpha} < \bar{\beta}$; alors on a

$$M_\alpha \leqq M_\gamma^{\frac{\bar{\beta}-\bar{\alpha}}{\bar{\beta}-\bar{\gamma}}} \cdot M_\beta^{\frac{\bar{\alpha}-\bar{\gamma}}{\bar{\beta}-\bar{\gamma}}} \cdot K_{\beta-\gamma}^{\alpha-\gamma}$$

où $K_{\beta-\gamma}^{\alpha-\gamma}$ est une constante finie, ne dépendant que de $\alpha-\gamma$ et $\beta-\gamma$.

Supposons que $K_{\beta-\gamma}^{\alpha-\gamma}$ est la constante la plus favorable, c'est-à-dire

$$K_{\beta-\gamma}^{\alpha-\gamma} = \overline{\underset{f}{\text{borne}}} \frac{M_\alpha}{M_\gamma^{\frac{\bar{\beta}-\bar{\alpha}}{\bar{\beta}-\bar{\gamma}}} \cdot M_\beta^{\frac{\bar{\alpha}-\bar{\gamma}}{\bar{\beta}-\bar{\gamma}}}}$$

où $f_0(x)$ parcourt toutes les sommes finies trigonométriques; il faut démontrer alors que cette borne supérieure est finie.

Que $K_{\beta-\gamma}^{\alpha-\gamma}$ ne dépende que de $\alpha-\gamma$ et $\beta-\gamma$, on le voit immédiatement, en observant que d'après la définition $f_{\alpha+\delta}(x)$ est une intégrale d'ordre δ de $f_\alpha(x)$, et nous pouvons donc supposer que $\gamma = 0$.

Posons $K_{\beta-\gamma}^{0} = K_{\beta-\gamma}^{\beta-\gamma} = 1$.

Le théorème s'énonce aussi

$$\log M_\alpha - \log K_{\beta-\gamma}^{\alpha-\gamma} \leqq \frac{\bar{\beta}-\bar{\alpha}}{\bar{\beta}-\bar{\gamma}} \log M_\gamma + \frac{\bar{\alpha}-\bar{\gamma}}{\bar{\beta}-\bar{\gamma}} \log M_\beta$$

et on voit qu'il exprime une sorte de »convexité« des nombres $\log M_\alpha$; dans la langue géométrique: β et γ étant fixes, il existe une fonction finie $L(\alpha)$, par exemple $\log K_{\beta-\gamma}^{\alpha-\gamma}$, telle que tout point dont les coordonnées sont $(\bar{\alpha}, \log M_\alpha - L(\alpha))$ est situé au-dessous de ou sur le segment qui joint les points $(\bar{\gamma}, \log M_\gamma - L(\gamma))$ et $(\bar{\beta}, \log M_\beta - L(\beta))$.

Au moyen de cette qualité on peut voir qu'il suffit de faire la démonstration dans le cas $\bar{\beta} - \bar{\gamma} < 1$, une telle »convexité« locale pouvant être étendue à une valeur de $\bar{\beta} - \bar{\gamma}$ quelconque.

En effet, supposons que le théorème soit vrai dans ce cas, et soit $\bar{\gamma} < \bar{\delta} < \bar{\varepsilon} < \bar{\beta}$ avec $\bar{\varepsilon} - \bar{\gamma} < 1$ et $\bar{\beta} - \bar{\delta} < 1$; alors il existe deux fonctions $L_1(\alpha)$ et $L_2(\alpha)$, telles que le point $(\bar{\alpha}, \log M_\alpha - L_1(\alpha))$ où $\bar{\gamma} < \bar{\alpha} < \bar{\varepsilon}$ (donc aussi dans le cas $\alpha = \delta$) n'est pas situé au-dessus du segment de $(\bar{\gamma}, \log M_\gamma - L_1(\gamma))$ à $(\bar{\varepsilon}, \log M_\varepsilon - L_1(\varepsilon))$ et le point $(\bar{\alpha}, \log M_\alpha - L_2(\alpha))$, où $\bar{\delta} < \bar{\alpha} < \bar{\beta}$ (donc aussi dans le cas où $\alpha = \varepsilon$) n'est pas au-dessus du segment de $(\bar{\delta}, \log M_\delta - L_2(\delta))$ à $(\bar{\beta}, \log M_\beta - L_2(\beta))$.

Par addition d'un terme linéaire à $L_2(\alpha)$ nous pouvons obtenir que $L_2(\delta) = L_1(\delta)$ et $L_2(\varepsilon) = L_1(\varepsilon)$; alors les deux points $(\bar{\delta}, \log M_\delta - L_1(\delta))$ et $(\bar{\varepsilon}, \log M_\varepsilon - L_2(\varepsilon))$ sont situés au-dessous de ou sur le segment qui joint $(\bar{\gamma}, \log M_\gamma - L_1(\gamma))$ à $(\bar{\beta}, \log M_\beta - L_2(\beta))$, et si nous posons

$$L(\alpha) = \begin{cases} L_1(\alpha) & \text{pour} \quad \bar{\gamma} < \bar{\alpha} < \bar{\varepsilon} \\ L_2(\alpha) & \text{pour} \quad \bar{\varepsilon} \leqq \bar{\alpha} < \bar{\beta} \end{cases}$$

le point $(\bar{\alpha}, \log M_\alpha - L(\alpha))$ est aussi situé au-dessous de ou sur ce segment, et notre théorème est démontré dans la bande plus large $\bar{\gamma} < \bar{\alpha} < \bar{\beta}$.

En continuant de cette manière, on peut vérifier le théorème pour une valeur de $\bar{\beta} - \bar{\gamma}$, aussi grande que l'on veut.

Donc, le problème se ramène au cas $\gamma = 0 < \bar{\alpha} < \bar{\beta} < 1$.

Les intégrales presque-périodiques d'un ordre δ, dont la partie réelle est un nombre entre 0 et 1, peuvent être représentées par des intégrales définies; c'est pourquoi nous avons fait ces considérations préliminaires; on a

$$f_\delta(x) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^\infty f_0(x-t)\cdot t^{\delta-1}\, dt \text{ [1]}$$

et par cette formule on voit facilement qu'on peut inversement exprimer $f_0(x)$ au moyen de $f_\delta(x)$:

$$f_0(x) = \frac{1}{\Gamma(-\delta)} \int_0^\infty \left[f_\delta(x-t) - f_\delta(x)\right]\cdot t^{-\delta-1}\, dt.$$

De l'expression de $f_\delta(x)$ on déduit

$$\begin{aligned}
&\left| f_\delta(x) - f_\delta(x-a) \right| \\
&= \left| \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^a f_0(x-t)\cdot t^{\delta-1}\, dt + \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_a^\infty f_0(x-t)\cdot \left[t^{\delta-1} - (t-a)^{\delta-1}\right] dt \right| \\
&\leq \frac{1}{|\Gamma(\delta)|} \left[\int_0^a M_0\cdot \left| t^{\delta-1} \right| dt + \int_a^\infty M_0\cdot \left| t^{\delta-1} - (t-a)^{\delta-1} \right| dt \right] \\
&= \frac{M_0}{|\Gamma(\delta)|}\cdot a^{\bar{\delta}}\cdot \left[\int_0^1 u^{\bar{\delta}-1}\, du + \int_1^\infty \left| u^{\delta-1} - (u-1)^{\delta-1} \right| du \right] = M_0\cdot a^{\bar{\delta}}\cdot C(\delta)
\end{aligned}$$

où $C(\delta)$ est une constante, ne dépendant ni de a ni de $f_0(x)$, car les dernières intégrales sont toutes deux convergentes.

Toutes ces considérations préliminaires faites, nous pouvons accomplir la démonstration du théorème:

(1) Voir E. R. Love l. c., p. 394. D'ailleurs, dans ce cas, où les fonctions considérées sont les sommes finies trigonométriques, cette relation et la suivante sont assez faciles à vérifier directement.

On a, puisque $0<\bar\beta-\bar\alpha<1$

$$f_\alpha(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^\infty\left[f_\beta(x-t)-f_\beta(x)\right]\cdot t^{\alpha-\beta-1}\,dt;$$

la différence entre crochets est bornée par $M_0\cdot t^{\bar\beta}\cdot C(\beta)$ et aussi par $2M_\beta$, donc, η étant un nombre positif quelconque

$$|f_\alpha(x)|\leqq\frac{1}{|\Gamma(\alpha-\beta)|}\left[\int_0^\eta M_0\cdot t^{\bar\beta}\cdot C(\beta)\cdot|t^{\alpha-\beta-1}|\,dt+\int_\eta^\infty 2M_\beta\cdot|t^{\alpha-\beta-1}|\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{|\Gamma(\alpha-\beta)|}\left[M_0\cdot C(\beta)\int_0^\eta t^{\bar\alpha-1}\,dt+2M_\beta\int_\eta^\infty t^{\bar\alpha-\bar\beta-1}\,dt\right]$$

$$=\frac{1}{|\Gamma(\alpha-\beta)|}\left[M_0\cdot C(\beta)\cdot\frac{\eta^{\bar\alpha}}{\bar\alpha}+2M_\beta\cdot\frac{\eta^{\bar\alpha-\bar\beta}}{\bar\beta-\bar\alpha}\right],$$

et en posant $\eta=\left(\frac{M_\beta}{M_0}\right)^{\frac{1}{\bar\beta}}$

$$|f_\alpha(x)|\leqq\frac{1}{|\Gamma(\alpha-\beta)|}\left[M_0\cdot C(\beta)\cdot\frac{1}{\bar\alpha}\left(\frac{M_\beta}{M_0}\right)^{\frac{\bar\alpha}{\bar\beta}}+2M_\beta\cdot\frac{1}{\bar\beta-\bar\alpha}\cdot\left(\frac{M_\beta}{M_0}\right)^{\frac{\bar\alpha}{\bar\beta}-1}\right]$$

$$=M_0^{1-\frac{\bar\alpha}{\bar\beta}}\cdot M_\beta^{\frac{\bar\alpha}{\bar\beta}}\cdot\frac{1}{|\Gamma(\alpha-\beta)|}\cdot\left[\frac{C(\beta)}{\bar\alpha}+\frac{2}{\bar\beta-\bar\alpha}\right]=M_0^{\frac{\bar\beta-\bar\alpha}{\bar\beta-0}}\cdot M_\beta^{\frac{\bar\alpha-0}{\bar\beta-0}}\cdot D(\alpha,\beta).$$

Notre théorème est ainsi démontré, et nous avons $K_\beta^\alpha\leqq D(\alpha,\beta)$.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer un résultat concernant les intégrales presque-périodiques d'ordre fractionnaire d'une fonction presque-périodique quelconque:

Théorème V: S'il existe deux fonctions presque-périodiques $f_\gamma(x)$ et $f_\beta(x)$, dont les séries de FOURIER sont respectivement

$$\sum' \frac{a_\lambda}{(i\lambda)^{\gamma}} e^{i\lambda x} \quad \text{et} \quad \sum' \frac{a_\lambda}{(i\lambda)^{\beta}} e^{i\lambda x}$$

$(\bar{\gamma} < \bar{\beta})$, une série de la forme

$$\sum' \frac{a_\lambda}{(i\lambda)^{\alpha}} e^{i\lambda x}$$

avec $\bar{\gamma} < \bar{\alpha} < \bar{\beta}$ est la série de Fourier d'une fonction presque-périodique $f_\alpha(x)$, et cette fonction est bornée par

$$M_\alpha \leqq M_\gamma^{\frac{\bar{\beta}-\bar{\alpha}}{\bar{\beta}-\bar{\gamma}}} \cdot M_\beta^{\frac{\bar{\alpha}-\bar{\gamma}}{\bar{\beta}-\bar{\gamma}}} \cdot K_{\beta-\gamma}^{\alpha-\gamma}.$$

Nous pouvons déterminer une suite de sommes finies trigonométriques $s_{1,\gamma}(x)$, $s_{2,\gamma}(x)$, $\cdots$ qui converge uniformément vers $f_\gamma(x)$, et telle que leurs intégrales presque-périodiques d'ordre $\beta-\gamma$ $s_{1,\beta}(x)$, $s_{2,\beta}(x)$, $\cdots$ convergent uniformément vers $f_\beta(x)$ (on peut choisir par exemple les sommes d'approximation Fejér-Bochner).

Alors la suite $s_{1,\alpha}(x)$, $s_{2,\alpha}(x)$, $\cdots$ des intégrales d'ordre $\alpha-\gamma$ de $s_{1,\gamma}(x)$, $s_{2,\gamma}(x)$, $\cdots$ est convergente aussi, car supposant

$$|s_{p,\gamma}(x) - s_{q,\gamma}(x)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |s_{p,\beta}(x) - s_{q,\beta}(x)| < \varepsilon$$

il en résulte, en vertu du théorème IV, que

$$|s_{p,\alpha}(x) - s_{q,\alpha}(x)| < \varepsilon \cdot K_{\beta-\gamma}^{\alpha-\gamma};$$

la convergence est donc uniforme, la fonction limite est presque-périodique, et on voit immédiatement que sa série de Fourier s'écrit

$$\sum' \frac{a_\lambda}{(i\lambda)^{\alpha}} e^{i\lambda x}.$$

Enfin, comme l'inégalité

$$M_\alpha \leqq M_\gamma^{\frac{\bar\beta-\bar\alpha}{\bar\beta-\bar\gamma}} \cdot M_\beta^{\frac{\bar\alpha-\bar\gamma}{\bar\beta-\bar\gamma}} \cdot K_{\beta-\gamma}^{\alpha-\gamma}$$

est vraie pour toutes les sommes finies trigonométriques, elle est vraie encore pour la fonction limite $f_\alpha(x)$.

Notre théorème est ainsi complètement démontré.

Comme une conséquence immédiate de ce théorème nous avons:

Théorème V bis: L'ensemble des nombres α, pour lesquels la série formelle

$$\sum \frac{a_\lambda}{(i\lambda)^\alpha} e^{i\lambda x}$$

est la série de Fourier d'une fonction presque-périodique, est une bande verticale dans le plan complexe.

Par le mot »bande« nous entendons aussi une droite ou un demi-plan ou le plan entier; et il doit être souligné que nous n'avons pas examiné les circonstances sur les droites qui limitent la bande.

Pour les valeurs entières de α et β la fonction $\varphi_0(x) = \operatorname{sign} \sin x$ est une fonction extrémale; cette propriété ne peut pas être généralisée aux valeurs quelconques de α et β[1]. En effet, nous démontrerons que dans le cas général il n'existe pas du tout une fonction extrémale indépendante de α et β. A cet effet nous déterminons K_1^α pour les valeurs réelles de α $(0 < \alpha < 1)$:

[1] On voit (seulement en modifiant un peu la démonstration) que le théorème V est vrai, même si la fonction $f_\gamma(x)$ n'est que bornée et presque-périodique au sens de Stepanoff, et on peut donc aussi appliquer ce théorème à la fonction discontinue $\varphi_0(x)$.

M_0 et M_1 étant donnés, il faut déterminer

$$\overline{\underset{f}{\text{borne}}}\, M_\alpha = \overline{\underset{f}{\text{borne}}}\ \overline{\underset{x}{\text{borne}}} \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f_0(x-t)\cdot t^{\alpha-1} dt \right|$$

pour les fonctions presque-périodiques $f_\alpha(x)$, pour lesquelles

$$\overline{\underset{x}{\text{borne}}}\, |f_0(x)| = M_0 \quad \text{et} \quad \overline{\underset{x}{\text{borne}}}\, |f_1(x)| = M_1.$$

Comme au théorème I, il nous suffit de considérer les fonctions réelles $f_0(x)$.

On a

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f_0(x-t)\cdot t^{\alpha-1}\, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\frac{2M_1}{M_0}} M_0 \cdot t^{\alpha-1}\, dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \int_0^{\frac{2M_1}{M_0}} \left[f_0(x-t) - M_0\right]\cdot t^{\alpha-1}\, dt + \int_{\frac{2M_1}{M_0}}^\infty f_0(x-t)\cdot t^{\alpha-1}\, dt \right\}$$

et en calculant le premier terme et en intégrant par parties chacune des dernières intégrales on obtient (avec un calcul facile)

$$f_\alpha(x) = \frac{2^\alpha \cdot M_0^{1-\alpha}\cdot M_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$+ \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \int_0^{\frac{2M_1}{M_0}} \left[f_1(x) - f_1(x-t) - M_0 t\right]\cdot t^{\alpha-2}\, dt + \int_{\frac{2M_1}{M_0}}^\infty \left[f_1(x) - f_1(x-t) - 2M_1\right]\cdot t^{\alpha-2}\, dt \right\};$$

les fonctions sous les signes d'intégration sont non-positives, donc

$$f_\alpha(x) \leq \frac{2^\alpha \cdot M_0^{1-\alpha}\cdot M_1^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

De même, nous aurions

$$-f_\alpha(x) \leq \frac{2^\alpha \cdot M_0^{1-\alpha} \cdot M_1^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$$

d'où

$$M_\alpha \leq \frac{2^\alpha \cdot M_0^{1-\alpha} \cdot M_1^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$$

et comme d'autre part, nous pouvons choisir $f_0(x)$, tel que les deux dernières intégrales deviennent aussi petites que l'on veut pour quelques valeurs de x, nous avons

$$K_1^\alpha = \frac{2^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}. \qquad (\alpha \text{ réel})$$

Pour toute fonction fixe, la borne supérieure M_α est une fonction continue de α (α étant réel), d'où

$$\lim_{\alpha \to 1} \frac{M_\alpha}{M_0^{1-\alpha} \cdot M_1^\alpha} = 1.$$

Mais

$$\lim_{\alpha \to 1} K_1^\alpha = \lim \frac{2^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} = 2$$

et ceci nous montre que, dans le cas général, il n'existe pas de fonction extrémale, et notre proposition est ainsi établie.

Les nombres K_1^α que nous venons de considérer, et K_n^k du théorème I sont donc d'une nature différente, ce qui semble indiquer qu'une détermination de K_β^α dans le cas général serait assez difficile; c'est pourquoi ce problème ne sera pas approfondi ici.

Enfin, nous allons démontrer deux théorèmes concernant les sommes finies trigonométriques (mais qui d'ailleurs se généralisent immédiatement aux fonctions presque-périodiques quelconques, exactement comme les théorèmes II et III):

Théorème II bis (l'inégalité de BOHR-FAVARD généralisée): Soit $p_0(x)$ une somme finie trigonométrique

$$p_0(x) = \sum_{h=1}^{k} a_h e^{i\lambda_h x}$$

et soit $\Lambda = \min |\lambda_h|$ (>0), on a pour l'intégrale $p_\alpha(x)$ d'ordre α, $\bar{\alpha}$ étant positif, en posant

$$M_\alpha = \overline{\underset{x}{\text{borne}}} \, |p_\alpha(x)| = \overline{\underset{x}{\text{borne}}} \left| \sum_{h=1}^{k} \frac{a_h}{(i\lambda_h)^\alpha} e^{i\lambda_h x} \right|$$

la limitation

$$M_\alpha \leqq M_0 \cdot \frac{C_\alpha}{\Lambda^{\bar{\alpha}}}$$

où C_α est une constante, ne dépendant que de α.

Le théorème se démontre facilement au moyen des théorèmes II et IV:

Le théorème II donne

$$M_n \leqq M_0 \cdot \frac{t_n}{\Lambda^n}$$

d'où, en choisissant $n > \bar{\alpha}$

$$M_\alpha \leqq K_n^\alpha \cdot M_0^{1-\frac{\bar{\alpha}}{n}} \cdot \left(M_0 \cdot \frac{t_n}{\Lambda^n}\right)^{\frac{\bar{\alpha}}{n}} = M_0 \cdot \frac{\left(K_n^\alpha \cdot t_n^{\frac{\bar{\alpha}}{n}}\right)}{\Lambda^{\bar{\alpha}}}$$

et notre théorème est démontré.

De même, on peut généraliser l'inégalité de BERNSTEIN:

Théorème III bis: Soit $p_0(x)$ une somme finie trigonométrique, on a pour l'intégrale d'ordre $-\alpha$ (la »dérivée d'ordre α«), $\bar{\alpha}$ étant positif, la limitation

$$M_{-\alpha} \leqq M_0 \cdot D_\alpha \cdot \max |\lambda_h|^{\bar{\alpha}}$$

où D_α est une constante, ne dépendant que de α.

Pour les nombres α réels, le théorème II bis a été démontré par Bela v. Sz. Nagy[1], et le théorème III bis a été énoncé par P. Civin[2], et ces auteurs communiquent aussi quelques valeurs numériques des constantes C_α et D_α (mais non les plus favorables). Ici, nous pouvons aussi donner des constantes numériques, en employant la formule $K_1^\alpha = \frac{2^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$, et voici comment nous pouvons améliorer le résultat de Civin: Soit $0 < \alpha < 1$, on a (d'après l'inégalité de Bernstein)

$$M_{-\alpha} \leqq K_1^{1-\alpha} \cdot M_0^{1-\alpha} \cdot M_{-1}^\alpha \leqq \frac{2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \cdot M_0 \cdot \max |\lambda_h|^\alpha$$

c'est-à-dire pour D_α $(0 < \alpha < 1)$, nous avons $\frac{2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$ $\left(\text{la valeur donnée par Civin est } 2 + \frac{4}{\alpha}\right)$.

III. L'inégalité de Kolmogoroff pour une fonction arbitraire d'une variable réelle.

Dans cette partie nous allons démontrer que l'inégalité de Kolmogoroff est valable, non seulement pour les fonctions presque-périodiques, mais aussi pour toute fonction d'une variable réelle; c'est-à-dire le théorème suivant:

Théorème I bis (l'inégalité de Kolmogoroff générale): Soit $f_0(x)$ une fonction bornée (borne $\overline{|f_0(x)|} = M_0 < \infty$) définie sur l'axe réel, et supposons qu'elle possède une intégrale bornée d'ordre n, $f_n(x)$ (borne $\overline{|f_n(x)|} = M_n < \infty$), les intégrales de $f_0(x)$ d'un ordre inférieur à n (les dérivées de $f_n(x)$) sont aussi bornées, et l'intégrale d'ordre k, $f_k(x)$ est bornée par

(1) Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie, 91 (1939), p. 3.

(2) Bulletin of the American Mathematical Society, 46 (1940), p. 410.

$$M_k \leqq M_0^{1-\frac{k}{n}} \cdot M_n^{\frac{k}{n}} \cdot \frac{t_k}{t_n^{\frac{k}{n}}}$$

avec

$$t_h = \frac{4}{\pi}\left\{1 + \frac{1}{(-3)^{h+1}} + \frac{1}{5^{h+1}} + \frac{1}{(-7)^{h+1}} + \cdots\right\}$$

et cette inégalité ne peut pas être améliorée.

Le théorème se déduit immédiatement du théorème I (comme nous l'avons dit, ce théorème est vrai aussi pour les fonctions complexes d'une variable réelle), au moyen de la proposition suivante:

Théorème VI: A toute fonction bornée $f_0(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, qui possède une intégrale bornée d'ordre n, $f_n(x)$, on peut toujours construire une fonction périodique $g_n(x)$, telle que

$$\left| \overline{\text{borne}} \left| f_n^{(h)}(x) \right| - \overline{\text{borne}} \left| g_n^{(h)}(x) \right| \right| < \varepsilon$$

$$(h = 0, 1, 2, \cdots n)\ ^{(1)}$$

où ε est un nombre positif quelconque, donné d'avance.

Nous abordons la démonstration de ce théorème en nous assurant que les fonctions $f_n^{(n-h)}(x) = f_h(x)$ sont bornées, c'est-à-dire que les bornes supérieures mentionnées dans le théorème sont finies; nous emploierons une méthode tout à fait analogue à celle utilisée dans la démonstration du théorème I; aussi ne ferons-nous que l'indiquer sommairement.

Il suffit de considérer les fonctions réelles $f_0(x)$.

Posons

$$q(x) = c \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) \cdots \left(x - \frac{2n-1}{2}\right)$$

où c est choisi assez grand pour que

(1) par $g_n^{(n)}(x)$ nous entendons une fonction dont l'intégrale est $g_n^{(n-1)}(x)$.

$$c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n > M_n \quad \text{et} \quad c \cdot n! > M_0.$$

Alors, dans les points $x = 0, 1, \cdots n$, le polynome $q(x)$ prend des valeurs de signes alternés, et les valeurs absolues sont plus grandes que M_n; par conséquent, la différence $q(x) - f_n(x+a)$ prend aussi des valeurs de signes alternés, et nous voyons que cette différence a au moins un zéro entre deux consécutifs de ces nombres, et cela quel que soit le nombre a. Le nombre total de zéros ne peut pas excéder n (car la n-ième dérivée $c \cdot n! - f_0(x+a)$ est toujours positive) et la différence a donc exactement un zéro entre deux consécutifs des entiers $0, 1, \cdots n$.

De cette propriété nous concluons que

$$M_{n-1} \leqq \overline{\underset{0<x<n}{\text{borne}}} \, | q'(x) |$$

puisque, sans cela, il serait possible de choisir le nombre a de telle manière que $q(x) - f_n(x+a)$ aurait trois zéros entre deux entiers consécutifs.

Alors, en employant cette limitation, nous pouvons trouver une borne de M_{n-2}, et ainsi de suite. Donc, il existe une constante finie $A = A(n, M_0, M_n)$, telle que

$$\left| f_n^{(k)}(x) \right| < A \qquad (-\infty < x < \infty;\ k = 0, 1, \cdots n).^{(1)}$$

Nous allons maintenant donner la démonstration du théorème, en construisant une fonction périodique $g_{n,L}(x)$, telle que

(1) L'évaluation de A est sans intérêt pour nous; il faut mentionner que, par cette méthode, on peut améliorer les inégalités dues à A. Gorny (Acta mathematica 71 (1939), p. 317) et à H. Cartan (Comptes rendus de l'Académie des Sciences 208 (1939), p. 414) entre les bornes supérieures des dérivées successives d'une fonction définie sur un intervalle fini; au lieu de $q(x)$ il faut prendre un polynome de Tchebyscheff convenablement normé: $a \cos(n \arccos bx)$.

$$\lim_{L\to\infty}\left|\overline{\text{borne}}\,|g_{h,L}(x)|-\overline{\text{borne}}\,|f_h(x)|\right|=0$$

$$\left(h=0,1,\cdots n;\quad g_{h,L}(x)=g_{n,L}^{(n-h)}(x)\right)$$

et nous démontrerons que pour $g_{n,L}(x)$ nous pouvons prendre la fonction n fois dérivable, qui possède la période $2L$, et qui dans l'intervalle $-L<x<L$ ne s'écarte de $e^{-\frac{x^2}{L}}\cdot f_n(x)$ que d'un polynome de degré n.

Posons $e^{-\frac{x^2}{L}}\cdot f_n(x)=\overset{*}{g}_{n,L}(x)$, et supposons $L>1$.

La dérivée d'ordre $n-h$ s'écrit

$$\overset{*}{g}_{h,L}(x)=e^{-\frac{x^2}{L}}\cdot f_h(x)+e^{-\frac{x^2}{L}}\cdot\frac{1}{L}\cdot\sum_{j,p,q,r}c_j\cdot\frac{x^p}{L^q}\cdot f_r(x)$$

où Σ signifie une somme finie, c_j est une constante numérique, $0\leqq q$, $0\leqq p\leqq q+1$ et $h<r\leqq n$; la justesse se voit immédiatement par induction.

Pour $|x|\leqq L$ on a $\left|\frac{x^p}{L^q}\right|\leqq\max\{1,|x|\}$, donc

$$\left|\overset{*}{g}_{h,L}(x)-e^{-\frac{x^2}{L}}\cdot f_h(x)\right|<e^{-\frac{x^2}{L}}\cdot\frac{1}{L}\cdot\max\{1,|x|\}\cdot A\cdot\Sigma|c_j|$$

d'où, premièrement

$$\left|\overset{*}{g}_{h,L}(x)-e^{-\frac{x^2}{L}}\cdot f_h(x)\right|<$$

$$<\frac{A\cdot\Sigma|c_j|}{L}\cdot\overline{\text{borne}}\left|e^{-\frac{x^2}{L}}\cdot\max\{1,|x|\}\right|<\frac{A\cdot\Sigma|c_j|}{L}\cdot\sqrt{L}<\frac{B}{\sqrt{L}}$$

où $B=B(n,M_0,M_n)$ est une constante (comme h ne peut prendre que $(n+1)$ valeurs différentes, on peut choisir B indépendant de h), et secondement, pour $x=\pm L$

$$\left|\overset{*}{g}_{h,L}(\pm L)-e^{-L}\cdot f_h(\pm L)\right|<e^{-L}\cdot A\cdot\Sigma|c_j|<\frac{B}{e^L}$$

donc

$$\left|\overset{*}{g}_{h,L}(\pm L)\right|<\frac{A+B}{e^L}.$$

Dans l'intervalle $-L < x < L$, nous posons $g_{0,L}(x) = \overset{*}{g}_{0,L}(x) - a_0$ avec $a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\overset{*}{g}_{0,L}(x)\,dx = \frac{1}{2L}\left[\overset{*}{g}_{1,L}(L) - \overset{*}{g}_{1,L}(-L)\right]$ par quoi nous obtenons que $\int_{-L}^{L} g_{0,L}(x)\,dx = 0$, c'est-à-dire que $g_{0,L}(x)$ prolongé périodiquement a une intégrale périodique. Pour $g_{1,L}(x)$ nous prenons $\int g_{0,L}(x)\,dx$, où la constante d'intégration est choisie de manière que $\int_{-L}^{L} g_{1,L}\,dx = 0$; $g_{2,L}(x) = \int g_{1,L}\,dx$ avec $\int_{-L}^{L} g_{2,L}\,dx = 0$, et ainsi de suite, jusqu'à $g_{n,L}(x)$, qui doit être simplement une intégrale de $g_{n-1,L}(x)$.

Nous avons, pour $|x| < L$ et $h = 0, 1, \cdots (n-1)$

$$g_{h,L}(x) = \overset{*}{g}_{h,L}(x) - \frac{a_0}{h!}\cdot x^h - \frac{a_1}{(h-1)!}\cdot x^{h-1} - \cdots - a_h$$

avec

$$a_h = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}\left[\overset{*}{g}_{h,L}(x) - \frac{a_0}{h!}\cdot x^h - \frac{a_1}{(h-1)!}\cdot x^{h-1} - \cdots - \frac{a_{h-1}}{1!}\cdot x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2L}\left[\overset{*}{g}_{h+1,L}(L) - \overset{*}{g}_{h+1,L}(-L)\right] - \frac{a_{h-2}}{2!}\cdot\frac{L^2}{3} - \frac{a_{h-4}}{4!}\cdot\frac{L^4}{5} - \cdots.$$

De cette formule de récurrence on déduit

$$a_k = \sum_{j,q} d_j\cdot\frac{1}{2L}\cdot\left[\overset{*}{g}_{q,L}(L) - \overset{*}{g}_{q,L}(-L)\right]\cdot L^{k+1-q}$$

où Σ est une somme finie, d_j une constante numérique et $1 \leq q \leq k+1$.

Posons enfin $a_n = 0$.

De l'évaluation de $\left|\overset{*}{g}_{q,L}(\pm L)\right|$ on obtient

$$|a_k| < \sum_{j,q} |d_j|\cdot\frac{1}{2L}\cdot 2\cdot\frac{A+B}{e^L}\cdot L^{k+1} = \frac{L^k}{e^L}\cdot(A+B)\cdot\Sigma|d_j|$$

et alors, dans l'intervalle $|x| < L$

$$\left| g_{h,L}(x) - \overset{*}{g}_{h,L}(x) \right| = \left| \frac{a_0}{h!} \cdot x^h + \frac{a_1}{(h-1)!} \cdot x^{h-1} + \cdots + a_h \right|$$

$$\leqq (h+1) \cdot \frac{L^h}{e^L} \cdot (A+B) \cdot \max_h \{ \Sigma | d_j | \}$$

ce qui nous montre qu'il existe une constante $C = C(n, M_0, M_n)$, telle que

$$\left| g_{h,L}(x) - \overset{*}{g}_{h,L}(x) \right| < \frac{L^n}{e^L} \cdot C$$

uniformément pour $L > 1$, $h = 0, 1, \cdots n$ et $|x| < L$.

Conformément à la méthode de construction $g_{n,L}(x)$ (prolongé périodiquement) est une intégrale périodique d'ordre n d'une fonction périodique $g_{0,L}(x)$, et il ne nous reste qu'à vérifier la proposition

$$\lim_{L \to \infty} \left| \overline{\text{borne}} \, | g_{h,L}(x) | - \overline{\text{borne}} \, | f_h(x) | \right| = 0.$$

Dans l'intervalle $-L < x < L$ on a

$$\left| g_{h,L}(x) - e^{-\frac{x^2}{L}} \cdot f_h(x) \right| \leqq$$

$$\leqq \left| g_{h,L} - \overset{*}{g}_{h,L} \right| + \left| \overset{*}{g}_{h,L} - e^{-\frac{x^2}{L}} \cdot f_h \right| < \frac{L^n}{e^L} \cdot C + \frac{1}{\sqrt{L}} \cdot B$$

et comme $g_{h,L}(x)$ a la période $2L$ on en déduit

$$\lim_{L \to \infty} \left| \overline{\text{borne}} \left| g_{h,L}(x) \right| - \overline{\underset{|x|<L}{\text{borne}}} \left| e^{-\frac{x^2}{L}} \cdot f_h(x) \right| \right| = 0.$$

Enfin nous voyons que

$$\lim_{L \to \infty} \left| \overline{\underset{|x|<L}{\text{borne}}} \left| e^{-\frac{x^2}{L}} \cdot f_h(x) \right| - \overline{\text{borne}} \left| f_h(x) \right| \right| = 0$$

car, $\left| e^{-\frac{x^2}{L}} \cdot f_h(x) \right| < |f_h(x)|$ et, x étant fixe, tout point x va entrer dans l'intervalle $|x| < L$ et $e^{-\frac{x^2}{L}}$ convergera vers 1.

La démonstration de notre théorème est ainsi complètement achevée.

Indleveret til Selskabet den 21. Marts 1941.
Færdig fra Trykkeriet den 25. August 1941.